Concordancias y complementariedades de las teorías socioculturales en educación matemática[1]

Concordances and complementarities of sociocultural theories in mathematics education[1]

Juan D. Godino
Universidad de Granada, Granada, Spain

Abstract. *Several theories used in mathematics education address the problems of teaching and learning from a sociocultural perspective. Such is the case of ethnomathematics, the anthropological theory, and socioepistemology, among others. These theories share some ontological and epistemological principles about mathematics, considering it as a cultural product that results from people's activity when faced with certain types of problems. Furthermore, they assume the relative character of mathematics with respect to the specific contexts in which it emerges, in relation to the modes of interaction that condition it, and in relation to languages, signs and artifacts available in every circumstance (cultural anthropology). The objective of this article is to analyze the scope of the selected theories and the possibility of advancing in the construction of a hybrid theoretical system that simplifies and organizes the conceptual and methodological tools that are applied in this type of research. Furthermore, the characteristics of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction are presented. This approach, which aims to advance in the construction of the aforementioned inclusive theoretical system, is also used to identify concordances and complementarities between the four theoretical models.*

Keywords: epistemology, sociocultural studies, ethnomathematics, anthropological theory, socioepistemology, ontosemiotic approach.

Sunto. *Diverse teorie usate in didattica della matematica affrontano i problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento da una prospettiva socioculturale. Tra le altre, l'etnomatematica, la teoria antropologica e la socioepistemologia. Tali teorie condividono alcuni principi ontologici ed epistemologici sulla matematica, considerandola come un prodotto culturale che deriva dall'attività delle persone di fronte a determinati tipi di problemi. Inoltre, queste teorie assumono il carattere relativo della matematica rispetto ai contesti specifici dai quali essa emerge, in relazione ai modi di interazione che la condizionano, ai linguaggi, ai segni e agli artefatti disponibili in ogni circostanza (antropologia culturale). L'obiettivo di questo lavoro è quello di analizzare il campo di applicazione delle teorie selezionate e la*

[1] Versión revisada de la conferencia plenaria impartida en la RELME 31, Lima, Perú (2017) con el título: "Articulación de Teorías Socioculturales en Educación Matemática Desde la Perspectiva del Enfoque Ontosemiótico".

possibilità di compiere progressi nella costruzione di un sistema teorico ibrido che semplifichi e organizzi gli strumenti concettuali e metodologici che si applicano in questo tipo di ricerca. Inoltre, vengono presentate le caratteristiche dell'approccio ontosemiotico alla conoscenza e all'istruzione matematica. Tale approccio, che cerca di compiere progressi nella costruzione del menzionato sistema teorico inclusivo, viene anche usato per identificare concordanze e complementarità tra i quattro modelli teorici.

Parole chiave: epistemologia, studi socioculturali, etnomatematica, teoria antropologica, socioepistemologia, approccio ontosemiotico.

Resumen. *Diversas teorías usadas en educación matemática abordan los problemas de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva sociocultural, entre otras, la etnomatemática, la teoría antropológica y la socioepistemología. Estas teorías comparten principios ontológicos y epistemológicos sobre las matemáticas, considerándolas como un producto cultural resultado de la actividad de las personas ante determinados tipos de problemas. Así mismo, aceptan el carácter relativo de las matemáticas respecto de los contextos específicos en los cuales emergen, y que son condicionadas por los modos de interacción, el lenguaje, los signos y artefactos disponibles en cada circunstancia (antropología cultural). El objetivo de este trabajo es analizar el ámbito de aplicación de las teorías seleccionadas y la posibilidad de avanzar en la construcción de un sistema teórico híbrido que simplifique y organice las herramientas conceptuales y metodológicas que se aplican en este tipo de investigaciones. Se presentan, además, las características del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, que pretende avanzar en la construcción del mencionado sistema teórico inclusivo, y se usa para identificar concordancias y complementariedades entre los cuatro modelos teóricos.*

Palabras clave: epistemología, estudios socioculturales, etnomatemática, teoría antropológica, socioepistemología, enfoque ontosemiótico.

1. Introducción

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los diversos factores que se deben tener en cuenta y la influencia de los diversos contextos culturales, justifican que se hayan generado diversas teorías para tratar de describir, explicar y diseñar dichos procesos. No obstante, la profusión de teorías genera dificultades de comunicación y de capitalización de los conocimientos. Esta es la razón por la que la articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014; Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de las matemáticas puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico. Prediger et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorarse entre sí a la unificación global. Algunas estrategias intermedias sugeridas por estos autores serían hacer comprensibles entre sí las teorías, comparar y contrastar diferentes aproximaciones, coordinar y combinar perspectivas, para, finalmente, lograr una integración y síntesis local.

En este trabajo iniciamos el estudio de varias teorías usadas en educación matemática que abordan las cuestiones sobre la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos de su aprendizaje desde una aproximación sociocultural. En particular, consideraremos la etnomatemática (ETM) (D'Ambrosio, 1985; Barton, 1996; Bishop, 1994), la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992, 1999) y la teoría socioepistemológica en matemática educativa (TSEM) (Cantoral & Farfán, 2003; Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014). El estudio comparativo se realiza desde la perspectiva ofrecida por el sistema teórico modular e inclusivo del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2007).

Comenzamos con una primera reflexión sobre la necesidad y utilidad de las teorías como herramientas imprescindibles para la investigación científica, como ayuda inestimable para comprender la práctica de la enseñanza y actuar sobre la misma de manera fundamentada. Seguidamente mostramos la complejidad de los procesos de estudio matemático, indicando los diversos focos, dimensiones, facetas y niveles que se deben tener en cuenta para poder realizar un análisis didáctico integral de dichos procesos. La finalidad de esta sección es proporcionar elementos que permitan dilucidar los ámbitos de aplicación de las teorías y la necesidad de avanzar en la construcción de un sistema teórico que tenga en cuenta, de manera modular e inclusiva, la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la Sección 4 presentamos una síntesis de los rasgos característicos de las tres teorías en discusión, mientras que en la Sección 5 hacemos una síntesis del enfoque ontosemiótico. En la Sección 6 analizamos las concordancias y complementariedades entre las cuatro teorías. En la última sección se incluye algunas reflexiones finales, mencionando aspectos sociales relevantes relacionados con la articulación de teorías.

2. Necesidad y utilidad de las teorías

2.1. *¿Qué es una teoría? Componentes y ámbito de aplicación*

Parece necesario, como un primer paso, explicitar qué se entiende por una teoría. Para Radford (2008, p. 320) una teoría se puede ver como un modo de producir comprensiones y modos de acción basado en:

- Un sistema, P, de *principios básicos*, que incluyen visiones implícitas y enunciados explícitos que trazan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.

- Una *metodología*, M, que incluye las técnicas de recogida de datos y su interpretación apoyada por P.
- Un conjunto, Q, de *cuestiones paradigmáticas* de investigación (patrones o esquemas que generan cuestiones específicas a medida que surgen nuevas interpretaciones o se profundizan, extienden o modifican los principios).

Como resultado de aplicar los principios y los métodos a las cuestiones de investigación se obtienen unos *resultados*, en la forma de descripciones y explicaciones, así como recursos y modos de acción justificados, los cuales forman parte de la teoría entendida en un sentido ampliado. Las teorías se usan como herramientas para describir, explicar y prescribir determinados modos de intervención en la práctica de la enseñanza.

Las teorías pueden diferir mucho por los tipos de cuestiones que abordan, los principios y nociones primitivas que adoptan, y los métodos que aplican. Las teorías pueden abordar todos o algunos de los componentes de las fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis descritos en la Figura 1. Por tanto, pueden diferir notablemente en su ámbito de aplicación. También es usual hablar de teorías externas e internas a la propia disciplina. Las primeras son aplicaciones al estudio de las matemáticas de teorías provenientes del campo de la psicología, sociología, o de otras disciplinas; las segundas son teorías locales, o de nivel intermedio, generadas dentro del campo de la educación matemática, aunque frecuentemente apoyadas también en teorías externas (por ejemplo: constructivismo, semiótica cognitiva o antropología cultural).

2.2. El problema de la multiplicidad de teorías

En principio, cualquier teoría puede producir conocimientos valiosos que ayudan a comprender el campo y actuar sobre el mismo de manera fundamentada. Pero las diversas teorías, pueden ser redundantes, contradictorias, parciales, o más o menos eficaces para realizar el trabajo pretendido. La clarificación, comparación y posible articulación de teorías debe orientarse, por tanto, a la elaboración de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas óptimo, que potencie la investigación en el campo. Este sistema puede incluir herramientas conceptuales provenientes de otras disciplinas, tales como la epistemología, psicología, sociología, con las adaptaciones e interpretaciones que los problemas específicos del estudio de las matemáticas puedan requerir, o bien teorías desarrolladas en el seno de la educación matemática. En nuestro caso asumimos que tal articulación de teorías se puede hacer mediante el análisis racional de los elementos constituyentes de las teorías y la elaboración de nuevas herramientas cuando la mera amalgama de las existentes no se considera posible o pertinente.

En este trabajo hemos seleccionado tres teorías para su comparación y posible articulación, las cuales comparten ciertos presupuestos provenientes de teorías externas más generales, como son las teorías socioculturales sobre el conocimiento y el aprendizaje. Trataremos de responder a las siguientes cuestiones para la etnomatemática (ETM), la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y la socioepistemología (TSEM):

- ¿Cómo plantean las teorías seleccionadas los problemas ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instruccionales propios de la educación matemática?
- ¿Han desarrollado estas teorías herramientas conceptuales y metodológicas suficientes para abordar las cuestiones que se plantean de manera eficiente?
- ¿En qué medida se pueden integrar estas teorías en el sistema teórico EOS?

3. Complejidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La realización de un análisis didáctico integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, que sirva de fundamento para lograr intervenciones didácticas idóneas y fundamentadas, requiere tener en cuenta las distintas fases propias de un diseño didáctico, las diversas dimensiones, facetas y niveles de análisis (Figura 1). Como se indica en Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014), el diseño didáctico, o ingeniería didáctica en sentido generalizado, incluye las *fases* de análisis preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. En las distintas fases están involucradas tres *dimensiones*, las cuales se refieren al contenido matemático en sí mismo, al contenido didáctico propiamente dicho y la dimensión meta didáctica (análisis de normas, meta-normas y valoración de la idoneidad del proceso). Las dimensiones didáctica y meta-didáctica deben tener en cuenta los conocimientos especializados desarrollados en cada una de las seis *facetas* siguientes:

- *Epistémica:* significados institucionales pretendidos e implementados para el contenido matemático, así como los problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, lenguajes y argumentos puestos en juego en cada significado.
- *Ecológica:* relaciones del tema con otros tópicos y con los contextos sociales, políticos, económicos que soportan y condicionan la enseñanza y aprendizaje.
- *Cognitiva:* niveles de desarrollo y comprensión de los estudiantes, estrategias, dificultades y errores con relación al contenido pretendido.
- *Afectiva:* actitudes, emociones, motivaciones y creencias de los estudiantes con relación al contenido y el proceso de estudio.
- *Interaccional:* organización del discurso en la clase y las interacciones entre el profesor y los estudiantes dirigidas a resolver las dificultades de los estudiantes y negociación de significados.

- *Mediacional:* recursos didácticos y tecnológicos disponibles para el estudio y posibles maneras de usar y distribuir estos recursos en el tiempo.

El análisis de las facetas, además de las dimensiones, debe realizarse atendiendo a los problemas, prácticas, objetos y procesos implicados (tanto de índole matemática como didáctica), implicando unidades y niveles de análisis específicos.

Un marco teórico que permita abordar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debería incluir modularmente herramientas pertinentes para abordar las cuestiones que se plantean en cada uno de los componentes de las fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis mencionados en la Figura 1.

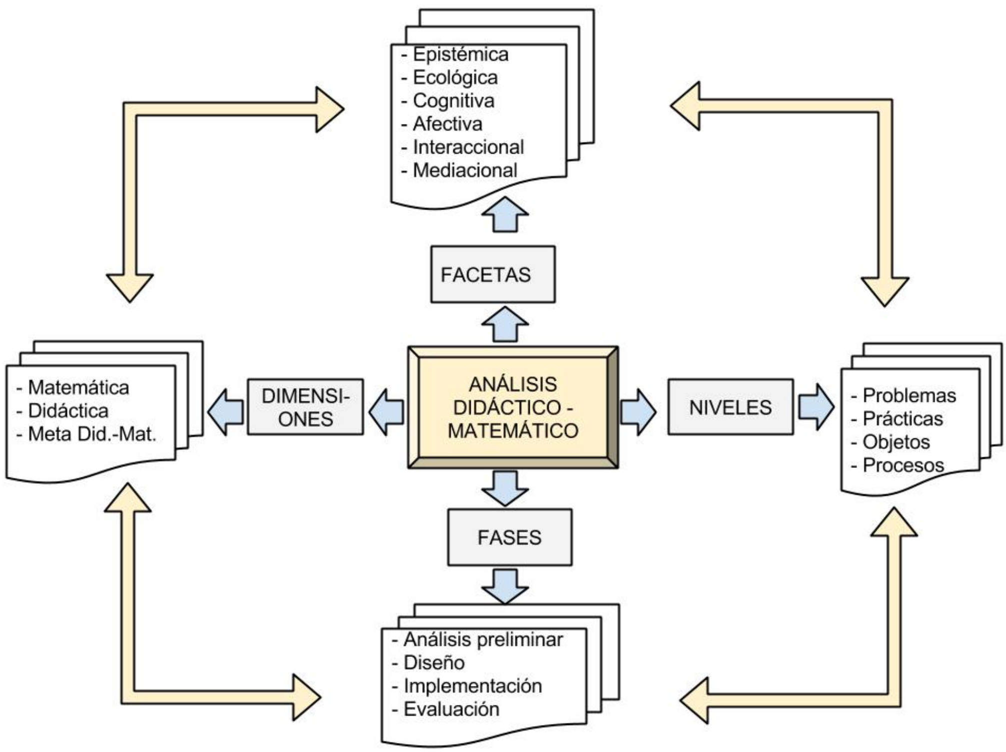

Figura 1. Focos de atención del análisis didáctico-matemático integral.

4. Teorías socioculturales en educación matemática

En esta sección presentaremos una síntesis de las principales características de tres teorías usadas en educación matemática. Trataremos de identificar las cuestiones paradigmáticas que abordan, los supuestos que adoptan, las herramientas conceptuales y metodológicas introducidas, así como su ámbito de aplicación.

4.1. El programa etnomatemático

Barton (1996) elabora la siguiente definición para la etnomatemática tras su análisis de los trabajos de D'Ambrosio, Gerdes y Ascher:

> Etnomatemática es un programa de investigación sobre la manera en que los grupos culturales comprenden, articulan y usan los conceptos y prácticas que nosotros describimos como matemáticas, tanto si el grupo cultural tiene un concepto de matemáticas como si no. (Barton, 1996, p. 214)

El programa de investigación y desarrollo de la etnomatemática no queda limitado al estudio de las prácticas matemáticas de los grupos étnicos (matemáticas indígenas) o las implicadas en actividades de la vida cotidiana y trabajos artesanales. Barton (1996) también incluye dentro del programa etnomatemático estudios internos a la matemática, tanto actuales (uso de estadística bayesiana en las estadísticas deportivas) como históricos (prácticas matemáticas y concepciones de los hindúes y griegos).

Vithal y Skovsmose (1997) describen cuatro facetas o campos de estudio de la etnomatemática:

1. *Historia de la matemática*. Se critica la visión tradicional de la historia de la matemática por ignorar, devaluar, distorsionar o marginar las contribuciones de otras culturas no europeas al cuerpo de conocimiento referido como matemáticas occidentales.
2. *Antropología cultural matemática*. Análisis de las matemáticas de culturas tradicionales, pueblos indígenas que pueden haber sido colonizados, pero continúan con sus prácticas matemáticas originales. Se han explorado estas prácticas en relación con temas como sistemas numéricos, simbolismo y lenguaje gestual, juegos y rompecabezas, geometría, espacio, formas, patrones, simetría, arte y arquitectura, tiempo, dinero, redes, grafos, dibujos en la arena, relaciones de parentesco y artefactos.
3. *Matemáticas en la vida cotidiana*. Análisis de las matemáticas usadas por diferentes grupos en entornos de la vida diaria mostrando el conocimiento matemático que se genera en una amplia variedad de contextos, tanto por adultos como por niños.
4. *Relaciones entre etnomatemática y educación matemática*. Se estudian las conexiones (o falta de ellas) entre las matemáticas encontradas en los contextos de la vida diaria y los correspondientes al sistema de la escuela formal.

Por su parte, Bishop se plantea la siguiente cuestión epistemológica fundamental que subyace a toda la investigación etnomatemática:

> ¿Existen una única matemática que aparece en diferentes manifestaciones y simbolizaciones, o hay diferentes matemáticas que se practican y tienen ciertas similitudes? Desde una perspectiva educativa, sin embargo, las preocupaciones se centran generalmente en las implicaciones de las diferencias entre el

conocimiento matemático de los diferentes grupos culturales. (Bishop, 1994, p. 15)

Una tesis básica de la etnomatemática es que la educación matemática se puede mejorar considerando el trasfondo cultural de los estudiantes al permitir comprender sus logros, actitudes y motivaciones. "El concepto de *background* se puede comprender como la red de relaciones y significados socialmente construida que son el resultado de la pasada historia vivida por el estudiante" (Skovsmose, 1994, p. 179).

Diversos autores resaltan también como campo de indagación de la etnomatemática el estudio de cuestiones de índole política (relaciones de poder, dependencia, subordinación) que conlleva el desarrollo y estudio de la matemática como disciplina académica. Se deben reconocer las relaciones de poder "naturalizadas" entre formaciones epistemológicas ligadas a grupos sociales/étnicos/culturales (Knijnik, 2012). La matemática europea se ha impuesto como la única forma de matemática existente y es la que se ha introducido en los sistemas escolares de todo el mundo como única alternativa. Se hace, de manera implícita, una crítica a la enseñanza de la matemática en las escuelas por estar al servicio de una sociedad tecnificada y mercantilizada. Otro mundo, menos mercantilizado, es posible y deseable; un motor para el cambio está en la educación, en la escuela, en el currículo, en las matemáticas que se enseñan y aprenden.

Algunos autores han asumido como fundamentación filosófica de la etnomatemática nociones claves de la filosofía de Wittgenstein tales como, juego de lenguaje, formas de vida, parecidos de familia, gramática, reglas (Vilela, 2010; Knijnik, 2012). Estas nociones apoyan y justifican la visión socio-antropológica de las matemáticas, propia de la etnomatemática, según la cual las prácticas sociales de otras culturas o grupos étnicos ante determinadas situaciones o actividades son también prácticas matemáticas.

Como vemos, los etnomatemáticos se han esforzado en decir lo que es la etnomatemática, pero no en describir lo puede ser la práctica matemática en sus diversas manifestaciones, tanto informales como formales, y los objetos resultantes de dicha actividad. Por tanto, en cierto modo tienen dificultades para describir las complejas relaciones entre la etnomatemática y la matemática.

Hay que reconocer que las diferentes formaciones epistemológicas a que dan lugar las diferentes culturas, comunidades de prácticas, los diferentes sistemas de prácticas y configuraciones de objetos matemáticos desarrollados no son comparables desde el punto de vista de su eficacia e idoneidad para resolver problemas. Esto es un hecho indiscutible: contar y calcular con los dedos, o contar y calcular con los números romanos es menos eficaz que contar con los sistemas de numeración posicionales. La matemática occidental ha permitido un desarrollo tecnológico muy superior a cualquier otra matemática.

4.2. Teoría antropológica de lo didáctico

La teoría antropológica en didáctica de las matemáticas (TAD) (Chevallard, 1992, 1999) aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que entronca con las corrientes de tipo socioculturales. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. El saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo, así como el resultado (o producto) de un proceso de estudio. La noción de estudio engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997) y permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático investigador, el que realiza el profesor cuando enseña matemática o del alumno que las aprende en la escuela. El investigador plantea y estudia problemas con el objetivo de construir matemáticas nuevas que aporten una solución a dichos problemas; el profesor y sus alumnos estudian matemáticas conocidas que permitan aportar respuestas a cuestiones problemáticas consideradas importantes en determinadas instituciones de la sociedad.

En los comienzos de la TAD se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay “actividad”, es decir trabajo humano, del que todos los objetos son emergentes. En la actualidad la noción de praxeología sintetiza la concepción antropológica de la matemática sobre la que se apoya la TAD. Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999, pp. 224–229) de la noción de praxeología u organización matemática.

> Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), ô, por una tecnología de ô, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por [T/ô/θ/Θ], constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología – u *organización praxeológica* – está pues constituida por un bloque *práctico-técnico*, [T/ô], y por un bloque *tecnológico-teórico*, [θ/Θ]. El bloque [θ/Θ] se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque [T/ô] constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología [T/ô/θ/Θ] *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías. (Chevallard, 1999, p. 229)

Dentro de este modelo, hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas.

Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.

Dado que las técnicas, tecnologías y teorías que se ponen en juego para resolver un determinado tipo de tareas pueden ser diferentes según las instituciones y contextos de uso en que tienen lugar se deriva, por tanto, el reconocimiento del carácter relativo (antropológico) de los saberes y de los conocimientos puestos en juego. Como afirman Sierpinska y Lerman (1996):

> La 'antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 856)

La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir la reconstrucción de las praxeologías matemáticas (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza-aprendizaje puede formularse en términos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

La TAD propone un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997), los cuales constituye el esbozo de una teoría instruccional. Los tipos de momentos didácticos que se consideran esenciales en el proceso de estudio de una organización matemática son los siguientes: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. La noción de "recorrido de estudio e investigación" (REI) complementa la de momentos didácticos y propone introducir en la escuela una nueva epistemología que permita reemplazar el paradigma escolar del "inventario" de saberes por un paradigma del cuestionamiento del mundo, para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación.

Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. La propuesta de los REI pretende recuperar la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular.

4.3. Teoría socioepistemológica

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) "se ocupa específicamente del problema que plantea la *construcción social del conocimiento matemático* y el de su *difusión institucional*" (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014, p. 93). El origen de este marco teórico está en los trabajos de Cantoral, Farfán y otros investigadores del grupo de investigación de la sección de educación superior del departamento de matemática educativa del CINVESTAV (IPN, México). Se considera como una necesidad básica para la investigación en matemática educativa el adoptar una "aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral & Farfán, 1998, p. 355).

La socioepistemología plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo como social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. Así mismo, se interesa por la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza, problematizando de manera primaria el qué enseñar (la naturaleza de las propias matemáticas) "y no sólo, como ha sido habitual en las investigaciones educativas, sobre el cómo enseñar" (Cantoral & Farfán, 1998, p. 367).

La TSME asume que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas se precisa acudir a un examen minucioso del *saber* (sea popular, técnico o culto), a su *problematización*, concordando, por tanto, con las aproximaciones epistemológica a la didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998).

> De este modo, la socioepistemología se caracteriza por ser una teoría *contextualizada*, *relativista*, *pragmática* y *funcional* que toma en cuenta la complejidad de la *naturaleza del saber* y su *funcionamiento cognitivo*, *didáctico*, *epistemológico* y *social* en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. (Cantoral et al., 2014, p. 98)

Principios de la TSME

La noción central es la de práctica social y la asunción de cuatro principios:

1. *Principio normativo de la práctica social*
   Las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, esto es, son las generadoras del conocimiento. "La *práctica social* no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la *práctica ejecutada*), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la *orientación de la práctica*)" (Cantoral et al., 2014, p. 100). Como ejemplo de tales prácticas sociales se cita la de *predicción*: la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad.
2. *Principio de la racionalidad contextualizada*
   La racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado. El escenario sociocultural en el que actúa el sujeto influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita.
3. *Principio del relativismo epistemológico*
   Como contraposición al absolutismo epistemológico que opta por la asunción de universales o verdad única, la TSEM concibe que el saber es, de hecho, una multitud de saberes con verdades relativas.

   > Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo (contextual), y particularmente la socioepistemología, acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean "erradas" existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado, para de allí, desarrollar el pensamiento matemático y construir conocimiento. (Cantoral et al., 2014, p. 102)
4. *Principio de resignificación progresiva* (*o apropiación situada*)
   Se asume que el conocimiento matemático adopta diversos significados según la historia, los contextos y las intenciones con las que se usa. Con la resignificación se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.

En síntesis:

> Una vez que un conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a un entorno, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva). (Cantoral et al., 2014, p. 103)

En la TSME se ha introducido la noción de "discurso matemático escolar" (dME) para designar una manera tradicional de entender la matemática escolar según la cual ésta se presenta como un sistema de razón estructurado lógicamente, como un lenguaje formal y estructuralista. Se supone que los estudiantes entienden ideas complejas sólo con mostrarles su definición formal en términos de conceptos precedentes y que comprenden un resultado al mostrarles su demostración y, que tal comprensión les permitirá, en situaciones futuras, aplicar las matemáticas a muy diversas situaciones de sus vidas. Un objetivo central de las investigaciones basadas en la TSME es proponer cambios en esta visión tradicional del dME hacia la perspectiva de "construcción social del conocimiento".

> En ese sentido lo importante no es enseñar los resultados de una actividad, sino comunicar a la actividad misma, y por ello, asumimos, los estudiantes deben aprender matematizando, organizando y reorganizando su realidad, realidad que no se restringe a la Física, Biología o Sociedad sino a toda aquella *realidad imaginable* o *razonable* para los propios estudiantes. (Cantoral et al., 2014, p. 105)

Con relación a este planteamiento nos parece necesario relacionar estos supuestos con los principios de la educación matemática realista (Freudenthal, 1968; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Por otra parte, la visión del dME que presenta la TSEM corresponde a visiones de la matemática y su enseñanza alejadas en el tiempo (época de introducción de la matemática moderna de los años 60 y 70), ajenas al constructivismo y socioconstructivismo que predomina en las orientaciones curriculares desde hace tiempo a nivel internacional (NCTM, 1989, 2000).

Otro problema que es necesario abordar en un análisis de la TSEM con vistas a su articulación con otros marcos teóricos es la "pérdida del objeto matemático", ante el énfasis que se pone en la "práctica social". De esta manera la matemática educativa se llena de actividad, de práctica, de contexto físico, biológico, social, lo cual es, sin duda, positivo, aunque no exclusivo de esta teoría. Pero al mismo tiempo se vacía de conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguajes, y de los problemas de construcción del propio edificio matemático, que es la garantía de generalidad, eficacia, precisión en la resolución de los problemas matemáticos y extramatemáticos. Tan peligroso para la educación matemática puede ser reducir la matemática a reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos), olvidando su origen y finalidad (enseñanza conceptualista), como reducir la matemática a práctica, sea individual o social, sin los objetos (reglas) que necesariamente le acompañan.

Otro problema epistemológico que amenaza a la TSEM es el relativismo radical asumido sobre el conocimiento matemático. Si bien es necesario, desde el punto de vista de la educación matemática, asumir que a cada objeto matemático se le debe reconocer una pluralidad de significados, dependiendo de los contextos de uso, esto no debe suponer el olvido de una característica esencial de dicho objeto: su carácter universal y necesario. Si nos ponemos de acuerdo en lo que significan los signos 2, + y 4, entonces, necesariamente se debe concluir que 2+2 = 4, en cualquier contexto, cultura o grupo social que se considere. La asunción de los presupuestos filosóficos sobre las matemáticas de Wittgenstein (1953), en particular su visión gramatical de los objetos matemáticos, permite superar el dilema del relativismo.

5. Enfoque ontosemiótico: Hacia un sistema teórico inclusivo

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la educación matemática, tales como: *¿Qué es un objeto matemático?*, o de manera equivalente, *¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, ...) en un contexto o marco institucional determinado? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?*

Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto.

Desde sus comienzos el EOS ha estado motivado por la necesidad de clarificar y articular nociones de otros marcos teóricos, en particular nociones usadas en el seno de la didáctica francesa, y el deseo de hacer compatibles las concepciones epistemológicas y cognitivas. Para ello se parte de introducir la noción de práctica matemática en los siguientes términos: "Una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

Se asume que las prácticas (operativas y discursivas) pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. La noción de práctica matemática está en la base, tanto del modelo epistemológico como del cognitivo; pero ello no implica que el objeto matemático desaparezca de la escena, ya que en las prácticas intervienen objetos y éstos emergen de las prácticas en una relación dialéctica constituyente (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino, 2002) con una tipología de objetos y procesos matemáticos primarios así como con una interpretación de la noción de función semiótica (relación triádica entre dos objetos, antecedente y consecuente, según un criterio o regla de correspondencia) que permite elaborar una noción operativa de conocimiento (significado, comprensión y competencia) (Figura 2).

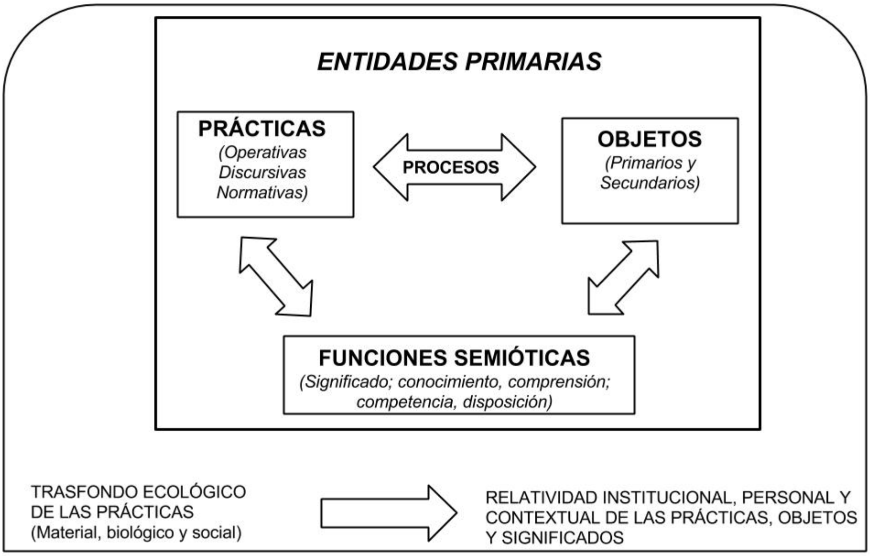

Figura 2. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS.

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein, 1953). La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de "sistemas de prácticas personales". Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Así mismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal-institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas ante ciertos tipos de tareas problemáticas.

El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo o intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

En trabajos más recientes el modelo ontosemiótico del conocimiento matemático se ha ampliado con otros supuestos y herramientas teóricas, en particular la noción de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras, & Font, 2006), que permite abordar cuestiones de tipo instruccional: *¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?*

Las nociones de dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009) e idoneidad didáctica (Godino, 2013), nuevas preguntas se introducen para hacer posible la reflexión meta-didáctica:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?
- ¿En qué medida se puede valorar como idóneo un proceso de estudio en unas circunstancias dadas y qué cambios se podrían introducir para mejorar dicha idoneidad?

Los postulados ontológicos del EOS se corresponden con los formulados en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker & Hacker, 1985; Bloor, 1983; Wittgenstein, 1978):

> Los conceptos/definiciones y las proposiciones son consideradas como reglas “gramaticales” de un cierto tipo. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (de tipo gramatical) que gobiernan el uso de cierto tipo de signos, puesto que precisamente es así como se usan, como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con ningún tipo de existencia que sea independiente de las personas que deseen conocerlos o del lenguaje mediante el cual se conocen. (Font, Godino, & Gallardo, 2013, p. 110)

Desde el punto de vista metodológico el EOS tiene en cuenta las cuatro fases propias de las investigaciones orientadas al diseño educativo: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. En cada una de ellas se tienen en cuenta las siguientes facetas o dimensiones:

- *Epistémica-ecológica*. Se determinan los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases del proceso; tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitiva-afectiva*. Se describen los significados personales de los estudiantes en los distintos momentos del proceso de estudio, en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de

objetos y procesos matemáticos. Además se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

- *Instruccional (interaccional-mediacional)*. Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

6. Concordancias y complementariedades

En este apartado iniciamos la comparación de la etnomatemática, teoría antropológica y socioepistemología desde la perspectiva del EOS, siendo conscientes del carácter limitado de este estudio.

6.1. Etnomatemáticas y EOS

Un punto central de la etnomatemática es la reivindicación del carácter matemático de las prácticas que realizan los grupos culturales diversos para abordar determinadas actividades profesionales y de la vida cotidiana. Matemáticas no son solo el producto de la actividad del matemático profesional, caracterizada por el uso de lenguajes formales, la argumentación deductiva y la generalidad de los teoremas, sino que matemáticas son también las prácticas que realizan “grupos culturales, tales como comunidades urbanas y rurales, grupos de trabajadores, grupos de profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros que se identifican por objetivos o tradiciones comunes” (D’Ambrosio, 2008, p. 9). “Desde sus primeros trabajos, D’Ambrosio resaltó que lo que llamamos matemáticas es una etnomatemática específica – aquella que es practicada por los matemáticos en las instituciones académicas” (Knijnik, 2012, p. 89).

Esta visión de las matemáticas es concordante con la onto-epistemología EOS; de manera particular se deriva de la forma en que se define la noción de práctica matemática, y de asumir el postulado de su relatividad institucional y personal. Así mismo, es consecuencia de cómo se interpreta la noción de institución, la cual abarca cualquier grupo cultural, étnico, contextos de uso, en general cualquier comunidad de prácticas que compartan una misma clase de situaciones problemáticas y, por tanto, comparten también los mismos artefactos y modos de dar respuesta a las mismas.

Por otra parte, el EOS ha desarrollado una visión antropológica del objeto matemático, como emergente (e interviniente) de las prácticas matemáticas, ligado a las reglas gramaticales de los lenguajes que se usan para describir los distintos mundos en los que las personas participan (perspectiva discursiva – Wittgenstiniana), así como una tipología de objetos y procesos, que pueden enriquecer el análisis de actividad matemática. La noción de configuración ontosemiótica puede caracterizar de una manera detallada las prácticas matemáticas de los grupos culturales, y por tanto, describir y explicar las diferencias y semejanzas entre las diferentes "variedades epistémicas" de matemáticas.

El relativismo epistemológico que implica la etnomatemática, que a algunos autores lleva a poner en el mismo plano las matemáticas de los grupos étnicos/culturales que las matemáticas académicas, ha recibido algunas críticas (Rowlands & Carson, 2002; Vithal & Skovsmose, 1997). Llevado a sus últimas consecuencias este relativismo impide reconocer el carácter universal y necesario de las proposiciones matemáticas, lo cual no deja de ser impertinente.

En el EOS se postula también un relativismo para las prácticas, objetos y significados matemáticos, pero al mismo tiempo se reconocen las relaciones ecológicas existentes entre las distintas formaciones epistemológicas que constituyen las diversas "variedades de matemáticas". Se puede asumir que la matemática en cierto sentido es múltiple, pero al mismo tiempo es única (Font, Godino, & Gallardo, 2013), lo que permite superar el dilema del relativismo.

El análisis del programa etnomatemático, en su componente educativo, revela que una parte sustancial del mismo es investigación orientada al diseño instruccional (Oliveras & Godino, 2015). Pero carece de una teoría instruccional explícita que apoye el diseño, implementación y análisis retrospectivo de las intervenciones educativas que trata de realizar. Con frecuencia encontramos trabajos "etnomatemáticos" que usan herramientas de otros marcos (educación matemática realista, ingeniería didáctica, …), de lo cual se deriva un cierto bricolaje teórico, no siempre coherente y productivo.

El EOS puede aportar herramientas analíticas para analizar los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas (sistema de prácticas, configuración ontosemiótica), herramientas para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula (configuración y trayectoria didáctica), y para la reflexión meta-didáctica (dimensión normativa e idoneidad didáctica). Por tanto, las herramientas EOS pueden ayudar a realizar esa descripción detallada de las prácticas matemáticas y didácticas que reclaman Vithal y Skovsmose (1997).

Por otra parte, la perspectiva etnomatemática enriquece la faceta ecológica del EOS al incorporar categorías analíticas de los componentes sociales y políticos implicados en la educación matemática. Así mismo, la reconstrucción de significados de referencia para los contenidos pretendidos, paso previo indispensable para la selección representativa de situaciones y configuraciones de objetos y procesos, debe tener en cuenta el factor multicultural de los contextos educativos correspondientes.

6.2. Teoría antropológica de lo didáctico y EOS

El EOS surgió como respuesta a la necesidad de precisar algunas nociones teóricas introducidas por Chevallard en los comienzos de desarrollo de la TAD, en particular la noción de práctica, objeto e institución, así como por la necesidad de articular las aproximaciones epistemológicas, cognitivas y semióticas a la investigación en educación matemática (Godino & Batanero, 1994).

> La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la teorización de Chevallard, de los que en un enfoque sistémico de la didáctica no se puede prescindir. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1991), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1991). (Godino & Batanero, 1994, p. 333)

Vistas desde un punto de vista retrospectivo, la principal noción desarrollada por la TAD, la praxeología matemática, que sintetiza la epistemología antropológica sobre la matemática (Wittgenstein, 1953; Bloor, 1983) se puede relacionar con las nociones de *sistema de prácticas*, operativas y discursivas y *configuración ontosemiótica* introducidas en el EOS.

Las praxeologías matemáticas se describen resaltando en su composición cuatro mega-objetos: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Pero esto no quiere decir que se pierde su origen o motivación antropológica, esto es, la emergencia y relatividad de las praxeologías respecto de las prácticas sociales que realizan las personas. Una praxeología es una organización matemática, una obra o resultado del trabajo colectivo realizado por personas para dar respuesta a un tipo de cuestiones. En la base está, por tanto, las prácticas o acciones que realizan las personas con la finalidad de resolver las cuestiones en un marco institucional dado, esto es, la cuaterna praxeológica está apoyada de manera consustancial en el sistema de prácticas sociales operativas y discursivas correspondiente.

En esas prácticas intervienen diversos tipos de objetos. La TAD ha destacado como intervinientes cuatro “mega-objetos”: las cuestiones o tareas que motivan la actividad, las técnicas que se ponen en funcionamiento (esto es, prácticas operativas), las descripciones y justificaciones de las técnicas (tecnología, o sea, prácticas discursivas) y la teoría, entendida como justificación de la tecnología (de nuevo prácticas discursivas de segundo orden). Tanto en las técnicas como en las tecnologías y teorías intervienen otros tipos de objetos (algoritmos, definiciones, proposiciones, conjeturas, teoremas), pero no se han modelizado en el marco de la TAD.

La herramienta praxeología matemática está bien adaptada para realizar análisis de los saberes matemáticos a nivel macroscópico, que es el objetivo de la TAD, pero es poco fina para análisis más microscópicos de la actividad matemática. Esta es la razón por la que el EOS ha introducido la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, y las cinco dualidades contextuales que se puede atribuir a los objetos y procesos. Se considera que el polo tecnológico/teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales y operativas (conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones) y nos parece necesario añadir un tercer polo formado por el sistema de objetos perceptibles mediante los cuales ser expresan y operan los otros dos polos (el lenguaje). El análisis detallado de los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas (en general, elementos procedimentales) suponen la aplicación contextualizada de objetos intensivos (conceptos-regla y proposiciones) y validativos, al menos de manera implícita. De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos procedimentales y situacionales. Esta circunstancia nos parece que resta relevancia a la distinción praxis-logos (y la de tecnología-teoría): los elementos discursivos y regulativos son densos por doquier en la actividad matemática.

El sistema teórico del EOS es una ampliación de la TAD (D'Amore & Godino, 2007), porque si bien los "sistemas de prácticas" se pueden asimilar como una primera versión de las praxeologías matemáticas, la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos desarrolla y complementa de manera importante la noción de praxeología. De igual modo, respecto del componente instruccional la noción de praxeología didáctica, momentos didácticos y recorridos de estudio e investigación son ampliados con las nociones de configuración y trayectoria didáctica. Además, el EOS ha introducido herramientas teóricas potentes para el análisis meta-didáctico, como son las de dimensión normativa e idoneidad didáctica.

6.3. Socioepistemología y EOS

La teoría socioepistemológica en matemática educativa (TSEM) asume una concepción de las matemáticas como actividad humana, mediada por el uso de herramientas y realizada en contextos organizados socialmente, lo que nos lleva a relacionarla de manera estrecha con el EOS y la TAD.

En el caso del EOS y también en la TAD se ha optado por no distinguir entre la dimensión epistemológica y la sociocultural al adoptar una visión ampliada de la epistemología. Para el EOS y la TAD, la epistemología tiene que ser entendida en términos socioepistemológicos, o mejor, en términos antropológicos. Como también se informó anteriormente:

> La "antropología del conocimiento" de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la

> epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 856)

Tanto la TSEM como el EOS y la TAD asumen supuestos similares acerca del origen humano de los objetos matemáticos, y por tanto, el rechazo de posiciones platónicas. Los objetos matemáticos son entidades emergentes de sistemas de prácticas sociales ligadas a campos de situaciones problemas. De este modo, la indagación de los tipos de situaciones-problemas, y de los sistemas de prácticas sociales asociadas en distintos momentos históricos y contextos institucionales es una estrategia metodológica compartida. Tales problemas y sistemas de prácticas son el punto de partida para la elaboración de propuestas de intervención en los currículos y en las clases de matemáticas.

La distinción entre "situación problema" y "práctica matemática" que propone el EOS puede ayudar a clarificar la noción de práctica social de la TSEM. Por ejemplo, la práctica social de la predicción no es entendida en la TSEM como "lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aun sin adquirir conciencia de sus acciones" (Cantoral et al., 2014, pp. 98–99). Sería necesario precisar qué es "lo que les hace hacer lo que hacen" en el caso de la práctica social de predecir. El EOS propone analizar la "acción de predecir" distinguiendo entre la "situación-problema" de predicción y las técnicas o acciones realizadas para resolver esa tarea o situación problemática. De esta manera, un tipo de problemas puede ser compartido por distintos grupos sociales o marcos institucionales, pero las acciones (o prácticas propiamente dichas) pueden diferir, y por tanto los objetos emergentes de tales prácticas (procedimientos, recursos lingüísticos, reglas y justificaciones). En el seno de las sociedades se pueden compartir ciertas necesidades y maneras de afrontarlas, pero estas prácticas (acciones situadas e intencionales) pueden ser diversas en grupos sociales diferentes. Ciertamente, en cada comunidad de prácticas las maneras de abordar la solución de los problemas están regulada por la costumbre, la tradición, el hábito.

En el EOS para hablar de práctica social es necesario especificar el tipo de situación-problema que se aborda y el marco institucional específico donde se realiza, ya que tales prácticas son relativas o dependientes de dichos componentes. En la definición de práctica matemática dada por Godino y Batanero (1994) estaban implícitas las características de ser, una acción-situada orientada hacia el fin de dar solución a una determinada tarea o situación-problema, apoyada en el uso de recursos específicos. Cuando es compartida en el seno de una comunidad o institución adquiere también una valencia normativa. En síntesis, una práctica social es una acción compartida, situada, intencional y normada. Entendiendo que tales acciones (manifestaciones, conductas observables) pueden ser de tipo operativo o discursivo, y dado su carácter normativo (tecnológico, teórico) podemos establecer una estrecha similitud con la noción de praxeología de la TAD. Pero como hemos explicado antes, el nivel microscópico de análisis que se requiere de la actividad matemática, requerido para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, hace necesario la introducción de la herramienta configuración ontosemiótica.

En la TSEM se usa con frecuencia el término "resignificar" con un sentido que nos parece concuerda con los postulados pragmáticos asumidos en el EOS para los significados de los objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista institucional como personal. Un mismo objeto matemático puede tener diversos significados dependiendo de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje en que participa. El aprendizaje supone la construcción y articulación progresiva de los diversos significados parciales de los objetos.

Consideramos que el EOS puede aportar a la TSEM algunas herramientas teóricas útiles para el estudio de la dimensión cognitiva, esto es, el estudio de los significados personales de los alumnos: sistemas de prácticas personales, objetos personales, dualidades cognitivas, conflicto semiótico. Esto permite un nivel de análisis más microscópico, con posibilidades descriptivas y explicativas nuevas.

Para la faceta o dimensión instruccional nos parece que la TSEM asume en gran medida la teoría de situaciones (Brousseau, 1986, 1998) como modelo teórico de referencia y la ingeniería didáctica (Artigue, 1992) como metodología de investigación de propuestas de intervención en el aula. La teoría de las configuraciones didácticas, dimensión normativa y los criterios de idoneidad de un proceso de estudio matemático (Godino, Contreras, & Font, 2006) pueden ser herramientas complementarias, las cuales pueden ayudar a superar los dilemas que el constructivismo plantea a la teoría de situaciones (Radford, 2008).

7. Reflexiones finales

El modelo epistemológico propuesto por el EOS es concordante, en líneas generales, con los correspondientes a la ETM, TAD y la TSEM. Comparte supuestos antropológicos similares sobre la actividad matemática y sobre los procesos y productos socioculturales emergentes. El EOS, no obstante, incorpora en su concepción de las matemáticas, de manera explícita, los elementos básicos del giro lingüístico introducido por Wittgenstein en la filosofía de las matemáticas y los aportes de la semiótica peirceana, para describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación matemática.

El giro antropológico y sociocultural en la manera de concebir las matemáticas no debería suponer, sin embargo, un olvido de la dimensión cognitiva, esto es, del papel del sujeto que construye y aprende matemáticas. Por esta razón el EOS introduce, junto a un modelo de cognición institucional otro modelo de cognición individual, construido sobre las mismas bases pragmáticas y antropológicas que el modelo de cognición institucional. En este sentido consideramos que el EOS puede ser un desarrollo coherente de los modelos teóricos mencionados, en los que la dimensión cognitiva queda en un segundo plano, o es modelada sobre bases teóricas dispares.

Aunque no sea posible, o incluso deseable, tratar de construir una “teoría holística que lo explique todo”, la educación matemática puede progresar en la construcción de un sistema conceptual y de herramientas metodológicas que hagan posible los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como tener en cuenta las interacciones entre las mismas. Como Ruthven (2014) sugiere,

> Esto implica adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera. (Ruthven, 2014, p. 278)

La construcción del sistema teórico EOS, iniciada a partir de la publicación del artículo “Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos” en RDM (Godino & Batanero, 1994), tiene un carácter progresivo y dinámico, como se muestra en los artículos posteriores publicados en diversas revistas especializadas y actas de congresos. Es fruto, además de la reflexión sobre los marcos teóricos usados en educación matemática, de múltiples investigaciones experimentales realizadas en el seno de diversos proyectos y programas de doctorado, como queda reflejado en el sitio web:
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

El EOS se propone tener en cuenta las diversas dimensiones y niveles de análisis (Figura 1) requeridos por la investigación sobre los procesos de estudio matemáticos en los diversos contextos en que tienen lugar. Por esta razón se prefiere describir como un enfoque, o sistema teórico, y no como una teoría local, intermedia o global. Las diversas herramientas conceptuales y metodológicas introducidas, sin duda sujetas a refinamiento y ampliación, para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, semióticos, cognitivos, instruccionales de la educación matemática, aportan un carácter inclusivo, modular y abierto al EOS. Esto permite introducir una nueva perspectiva en el problema de la articulación de teorías en educación matemática.

Aunque desde el inicio de la construcción del EOS se han tratado de mostrar las concordancias y complementariedades con otras teorías, en particular, con teorías que forman parte de la "escuela francesa de didáctica de las matemáticas" (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2006), como la teoría de situaciones didácticas (TSD), TAD, teoría de los campos conceptuales (TCC), teoría de los registros de representación semiótica (TRRS), y se ha continuado con otros estudios comparativos, el problema continúa abierto. Somos conscientes de las dificultades de esta empresa, porque en el fondo se está proponiendo una estrategia para aplicar el principio de la "navaja de Occam": construir un sistema teórico híbrido, no una gran teoría superficial e ineficaz, que permita suprimir, por ser confusas, redundantes, o poco eficientes, algunas de las teorías existentes.

Puesto que cada teoría conlleva una comunidad de fervorosos practicantes, que comparten no solo ideas sino también intereses diversos (económicos, políticos, afectivos), es de suponer que las resistencias para su inclusión en otro marco más amplio serán muy fuertes. Es natural que se produzcan fenómenos de protección y delimitación de fronteras que limitan los movimientos de sus miembros, generando relaciones de dependencia y subordinación.

La didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, tiene como finalidad epistémica comprender una parcela de la realidad y producir enunciados válidos sobre ella, como resultado de la indagación científica. Pero el campo de juego de la investigación científica tiene, además, una dimensión social y es también una competición entre agentes, "lo que resulta en una distribución desigual de algunas formas específicas de capital – una fuente de ventaja en el propio juego y una fuente de poder sobre los otros agentes" (Grugeon-Allys, Godino, & Castela, 2016, p. 83). Ser reconocido como productor de una teoría proporciona crédito material y simbólico a un investigador. Este fenómeno estimula la multiplicación de teorías: hay un mayor potencial, desde un punto de vista individual, en crear la propia teoría que en buscar la aprobación para una contribución en una teoría existente.

¿Qué ocurre si el mundo creado alrededor de una teoría está sesgado, se apoya en herramientas poco efectivas y apoya una visión parcial y distorsionada de la realidad que se estudia? Se puede producir un fenómeno de sectarismo que atrapa a sus miembros y restringe sus grados de libertad. Una teoría, por tanto, puede ser un factor de desarrollo del conocimiento científico, pero también una rémora cuando la "afectividad sociológica" que conlleva interacciona negativamente con la "racionalidad científica", entendida ésta como el empeño intelectual humano de alcanzar una comprensión del mundo. Tomar conciencia de la tensión existente entre la necesidad epistemológica de simplificar las teorías y los condicionantes sociológicos planteados por el juego de poder implicado en cualquier campo científico puede ser el primer paso para superar el dilema.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 241–286.

Artigue, M. (1992). Didactique engineering. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of mathematics* (pp. 41–66). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Baker, G. P., & Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein: Rules, grammar and necessity: An analytical commentary on the philosophical investigations* (Vol. 2). Glasgow: Basil Blackwell.

Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1)*,* 201–233.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.

Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. *For the Learning of Mathematics*, *14*(2), 15–18.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein: A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* 42, 353–369.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *6*(1), 27–40.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91–116.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997): *Estudiar matemática: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Horsori.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44–48.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática, eslabón perdido entre las tradiciones y la modernidad*. México, DF: Limusa.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *10*(2), 191–218.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1–2), 3–8.

Gascón, P. J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7–33.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2–3), 237–284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111–132.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39–88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 117–150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2–3), 167–200.

Grugeon-Allys, B., Godino, J. D., & Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57–86). Cham: Springer.

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: Ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1–2), 87–100.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 432–449.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 165–178.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17). Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/253274896

Rowland, S., & Carson, R. (2002). Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 79–102.

Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? En A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267–279). Cham: Springer International Publishing.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & L. Colette (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, *37(*4), 287–307.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 133–170.

Vilela, D. (2010). Discussing a philosophical background for the ethnomathematical program. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 345–358.

Vithal, R., & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: A critique of 'Ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 131–158.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematics* (G. H. von Wright, R. Rhees, & G. E. M. Anscombe, Eds.). Oxford: Basil Blackwell. (Trabajo original publicado en 1956).